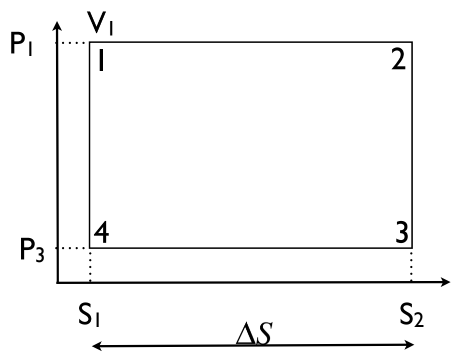
1 Machine de Rankine idéale

Un gaz parfait subit successivement un processus isobare à la pression P_1, un processus adiabatique à entropie S_2, un processus isobare à la pression P_3 et finalement un processus adiabatique à l'entropie S_1 (voir graphique). Le volume V_1 est donné. Le gaz est modélisé par les équations usuelles :$E =$

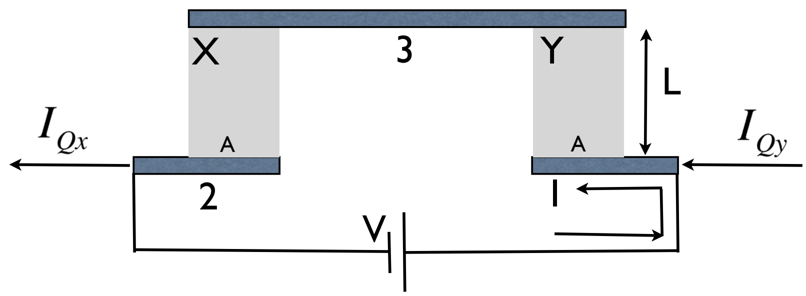


$cnRT$ et $PV = nRT$. La chaleur spécifique à pression constante est donnée, c_P, avec $c_P = (c+1)nR$ et $\frac{\partial S(T,P)}{\partial T} = \frac{c_P}{T}$. Dans un processus adiabatique, on a $PV^\gamma = constante$ avec $\gamma = 1 + \frac{1}{c}$. Toute autre formule concernant le gaz parfait doit être démontrée. Toutes les réponses doivent être rapportées aux données suivantes : $P_1, P_2, T_1, V_1, \Delta S$.

1. (1 pt) Obtenir la température T_2 à la fin du premier processus isobare. Pour la suite, on peut prendre T_2 comme connu.
2. (0.5 pt) Obtenir le travail du gaz, ΔW_{12}, dans cet isobare.
3. (0.5 pt) Montrer que le changement d'énergie dans cet isobare vaut $\Delta E_{12} = cnRT_1 \left(\exp(\frac{\Delta S}{c_P}) - 1\right)$
4. (0.5 pt) Calculer $\Delta W_{23} = \int -PdV$ pour le processus adiabatique (2-3).
5. (0.5 pt) Calculer $nr\,(T_3 - T_2)$.

2 Réfrigérateur Peltier

On considère le dispositif constitué de deux barreaux de section A, de longueur L (voir figure) relié électriquement par des conducteurs supposés idéaux (conductivité électrique et thermique infinies). Ces deux matériaux



sont supposés chacun obéir aux lois phénoménologique du transport :

$$\begin{cases} \mathbf{j}_s = -\left(\dfrac{\kappa}{T} + \sigma\varepsilon^2\right)\boldsymbol{\nabla} T - \dfrac{\sigma\varepsilon}{q_e}\boldsymbol{\nabla}\left(\mu_e + q_e V\right) \ , \\ \mathbf{j}_q = -\,\sigma\varepsilon\,\boldsymbol{\nabla} T - \dfrac{\sigma}{q_e}\boldsymbol{\nabla}\left(\mu_e + q_e V\right) \ . \end{cases} \tag{1}$$

Ici, $\mathbf{j}_s$ est la densité courant d'entropie et $\mathbf{j}_q$ est la densité de courant électrique.

1. (1 pt) Montrer que la densité de courant thermique d'énergie obéit la relation :
$$\mathbf{j}_Q = -\,\kappa\,\boldsymbol{\nabla} T + T\,\varepsilon\,\mathbf{j}_q \ . \tag{2}$$
2. (0.5 pt) Si le barreau fait avec le matériau X a la conductivité électrique σ_x, et celui fait du matériaux Y a la conductivité σ_y, calculer le courant électrique I traversant les deux barreaux.
3. (0.5 pt) Calculer le courant de chaleur I_{Qy} entrant dans le contact 1.
4. (0.5 pt) Calculer la puissance de refroidissement (un courant thermique d'énergie entrant dans la plaque 3).

3 Point d'ébullition d'un mélange idéal

On considère un mélange d'eau (substance A) et de sel (substance B) comme un mélange idéal, c'est-à-dire que le potentiel chimique de la substance A suit :

$$\mu_A^{(l)} = \mu_A^{*(l)} + RTln(x_A)$$

où $\mu_A^{*(l)}$ est le potentiel de la substance pure. On cherche à calculer dans le cadre de ce modèle comment la température d'ébullition de la solution change avec la concentration de sel dans l'eau, x_B ($x_A + x_B = 1$). On notera que la phase vapeur est pure.

1. (0.5 pt.) De quel principe général découle la condition d'équilibre :

$$\mu_A^{(l)}(T) = \mu_A^{*(g)}(T)$$

2. (0.5 pt.) Montrer que dans la limite x_B très petit, on a :

$$\mu_A^{*(g)}(T) - \mu_A^{*(l)}(T) = -x_B RT$$

3. (0.5 pt.) Utiliser les définitions des fonctions thermodynamiques G et H pour trouver la relation entre le potentiel chimique d'une substance pure, son enthalpie molaire h^* et son entropie molaire s^*

$$\mu^* = h^* - Ts^*$$

4. (0.5 pt.) Montrer :

$$-x_B RT = \Delta H - T\Delta S$$

   où $\Delta H = h^{*(g)} - h^{*(l)}$ et $\Delta S = s^{*(g)} - s^{*(l)}$.

5. (0.5 pt.) On suppose que ΔH et ΔS sont indépendant de la température autour de la température d'ébullition $T*$ de l'eau pure. Montrer :

$$T - T^* = x_B \frac{RT^2}{\Delta H}$$

4 Atmosphère exponentielle

On suppose que l'atmosphère terrestre peut être modélisée par un gaz parfait, composé de molécules qui ont chacune la masse m, et que la température est uniforme. Cette dernière hypothèse est évidemment très discutable, elle est imposée pour simplifier le problème. On suppose de plus que la force de la gravitation peut être modélisée par le modèle de la pesanteur, c'est-à-dire que les molécules subissent une force $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ quelle que soit la hauteur h au-dessus du sol. On note $n(h)$ la densité de l'atmosphère (nombre de molécules par unité de volume). On a donc $P = nkT$, où k est la constante de Boltzmann. On suppose connu la densité au sol $n_0 = n(h = 0)$.

1. (0.5 pt.) Appliquer la statistique de Boltzmann pour obtenir la fonction $n(h)$.

2. (0.5 pt.) On considère une colonne de gaz de section A. Montrer :

$$\frac{dP}{dh} = mgn$$

en faisant le bilan des forces exercées sur une tranche de cette colonne, située entre h et $h + dh$.

3. (0.5 pt.) Déduire $n(h)$ de l'équation différentielle pour P.
4. (0.5 pt.) Avec ce modèle, pour un gaz de masse molaire de 50 grammes, estimer à quelle hauteur la pression diminue de 10%.